

Excel 圖解法對運動產品之品質管制應用

莊木貴、鄭素珍

摘要

本研究係應用圖解方法，求出運動產品最佳預燒檢驗時間。首先藉由有計畫性與非計畫性置換策略，推導出每單位時間長期期望成本公式。因預燒時間長短會影響產品之製造成本；當預燒時間太長時，造成檢驗成本和部份良品被篩除之成本增加；相對地，當預燒時間太短時，則無法將不良品篩除，造成維修及保證成本增加。因此，本文透過品質管制策略所建立之檢驗成本模式，證明在某些合理的條件下，具有唯一之最佳檢驗策略。此外，並提供兩種解決方法，除了傳統解析法外，另一種係以總測試時間(Total Time on Test) 觀念之圖解法求出最佳解，求解過程亦配合電腦圖解法獲得。尤其是在運動產品壽命未知之情形下，統計估計法可直接由實際測試資料取得，再配合圖解法求出最佳之預燒時間，其結果與傳統之解析法一致，並舉例詳加說明。

關鍵詞：預燒；檢驗；期望成本；總測試時間；統計估計法。

Graphical approach to quality control applications of sport product

ABSTRACT

In this research we present a graphical approach for determining optimal inspection time of sport product. By incorporating planned replacement and unplanned replacement into a sport system, we derive the long-term expected cost per unit time. Due to the production cost affecting by the burn-in time, the cost of the measurement has been changed. Applying the total quality control strategy, it would help to develop the proper model of burn-in time. We also show that, under certain conditions, there exists a finite and unique optimum policy. In particular, two kinds of solution procedure are discussed. One is straightforward procedure and the other is geometric approach based on the Total Time on Test (TTT) concept. A graphical solution procedure for deriving the optimal inspection time is proposed, and the optimal policies are obtained directly from real data.

Keywords : Burn-in; Inspection; Expected cost ; Total Time on Test (TTT); Statistical procedure

壹、前 言

隨著經濟的發展，民衆收入的增加，物質享受亦較昔日豐富，也改變了國民生活方式與價值觀念，國人已逐漸重視運動與休閒對強身建國之功能與重要性。

尤其是政府爲順應社會變遷，從民國九十年開始實施週休二日制，民衆對運動與休閒的參與日增，接觸到運動產品的機會也愈來愈多，吾人對於運動器材之品質及運動系統之安全可靠度益加重視，特別是有些器材（或系統）在使用時突然發生故障，對生命之威脅與財產之損失影響甚鉅；小至低價位的器材如乒乓球之損壞，大至高價位或技術性的系統如雲霄飛車的失控等。因此，想要維持低失效的方法，可在產品銷售前追求高品質、高可靠度產品的製造過程著手。爲了能在出廠前及早發現不良品，製造商經常採取預燒(burn-in)檢驗來篩除一些壽命較短的不良品。雖然預燒時間愈長可使不良品愈可能被篩除，進而降低維修及保證成本；但相對地也會造成檢驗成本增加，甚至有一些良品會被篩除掉。故本文提出品質管制策略之成本模式，尋求最佳之預燒時間，期使能製造出低成本且高品質的產品。

有關在高品質運動產品的製造，除了有賴高可靠度的產品設計外，還需要穩定的生產系統才可產生出符合設計的品質，然而，在多數的製造系統中，生產機器設備在經過長時間使用後，難免會發生老化現象，導致機器設備進入失控的狀態而產生不符合設計品質之不良品而降低整體產品之品質。由 1960 年開始即有廣泛且深入的相關文獻出爐，其研究方向多集中在製程檢驗和系統維護方面，例如 Tapiero & Lee [3]與 Chen 等[4]利用抽樣檢驗來篩選已產生之不良品，並將所發現之不良品重做以便提高出廠品質，進而降低廠商負擔的保證成本，在此前提下制定抽樣檢驗之樣本數，使檢驗成本、重做成本和保證成本等總成本爲最低。Kar & Nachals [5]與 Nguyen & Murthy [6]等探討預燒試驗方法，他們使用預燒檢驗的技術，在產品出廠前先降低產品初期故障時之高故障率，並找出最佳預燒策略使單位產品之總成本最低。Murthy 等[7]考量製成品中有固定比例之不良品，他們提出以預燒檢驗來篩除壽命較短之不良品。

在求解過程中，除了應用傳統解析法外，也使用總測試時間(Total Time on Test 簡稱 TTT)圖解法。首先提出此觀念係在 1953 年 Epstein & Sobel [8] 所探討，但如何將此觀念應用於品質管制方面，一直到 1972 年 Barlow 等 [9] 始證明當樣本資料趨近於無限大時，TTT 繪製圖(TTT Plot)趨近於失效分配之 TTT 轉式(TTT Transform)，其中 TTT 繪製圖與 TTT 轉式皆為 TTT 觀念衍生而來。Barlow & Campo [10] 更詳細介紹 TTT 觀念推展出 TTT 轉換與 TTT 繪製圖之方法，並證明可應用於失效資料之分析，而且一些可靠度維護模式中可使用 TTT 觀念來解決。例如 Bergman [11] 利用 TTT 觀念，探討可靠度維護模式以圖形法求解並探討失效分配與 TTT 轉換分配間之關係與辨識。尤其是 Bergman & Klefsjö [12] 藉由 TTT 觀念之推廣，更明確定義 TTT 轉式為系統之存活函數，並用圖形法來分析年齡檢驗策略，由此證明 TTT 觀念在可靠度中是一個非常有用的工具。

對於會退化之運動生產系統或產品，雖可藉由批量控制生產階段的製程品質，但仍無法完全遏止不良品的產生。有鑑於此，本文針對運動產品的壽命服從韋伯分配下提出一種品質管制策略；以出產前之預燒檢驗時間，尋求最佳預燒策略，亦即可在檢驗階段中篩除已生產之不良品下，使單位產品總成本為最低。除了彙總 TTT 觀念與應用於連續型檢驗分配外，並利用無母數統計法，從真實預燒的間斷型資料中以估計法透過簡單的 Excel 繪製圖求解，所得結果趨近於最佳值。

貳、成本模式分析

為提昇運動產品之品質，降低整體成品失效率，本節考慮每個產品在製作完成後，都需經過一段時間的預燒檢驗（或稱壽命檢驗）。假設預燒時間為 T ，在預燒時間過後，將已失效的產品剔除，只售出通過預燒檢驗的產品，考慮每個產品之預燒成本為 C_p ，處理每個沒有通過預燒檢驗的產品需要負擔更高之成本為 C_f (含產品本身成本)，其中 $C_f > C_p > 0$ 。

並考慮運動產品之壽命分配為韋伯分配，亦即經過長期使用後會發生退化現象，具有分配函數 $F(x)$ 及機率密度函數 $f(x)$ ，當形狀參數 β 與尺度參數 α 在已給定之情況下，則韋伯分配的機率密度函數定義為：

$$f(x|\alpha, \beta) = \alpha\beta x^{\beta-1} \exp\{-\alpha x^\beta\} \quad (2.1)$$

每個產品預燒週期為：

$$L(x, T) = \begin{cases} T & \text{if } x \geq T \\ x & \text{if } x < T \end{cases} \quad (2.2)$$

預燒週期之成本為：

$$Q(x, T) = \begin{cases} C_p & \text{if } x \geq T \\ C_f & \text{if } x < T \end{cases} \quad (2.3)$$

令 $B(T)$ 代表產品在預燒時間為 T 時之每單位時間期望成本。則根據更新報酬理論 (Ross [13])， $B(T)$ 可如下表示：

$$\begin{aligned} B(T) &= \frac{E[Q(x, T)]}{E[L(x, T)]} \\ &= \frac{C_p + (C_f - C_p)F(T)}{\int_0^T \bar{F}(x) dx} \end{aligned} \quad (2.4)$$

其中 $F(T) = 1 - \exp\{-\alpha T^\beta\}$ 。

參、最佳策略

我們的目標是如何找到最佳的預燒時間 T^* ，使得成本函數 $B(T)$ 為最小。亦即求解函數 $B(T)$ 的最小化問題，其充分且必要條件為 T^* 滿足 $\frac{dB(T)}{dT} \Big|_{T=T^*} = 0$ 。且 T^* 為下列方程式之解：

$$[(C_f - C_p)] \int_0^T [f(T) - f(t)] \bar{F}(t) dt - C_p = 0 \quad (3.1)$$

將式(2.1)代入上式，並撰寫程式語言及呼叫 IMSL 積分庫函數，經計算機遞迴式的演算，即可找出最佳解 T^* 。

下面的定理告訴我們在某些合理的條件下，第(3.1)式可以求出存在且唯一解答。

定理：若 $C_f > C_p$ ，且 $f(t)$ 在時間 t 時為連續且嚴格遞增，則存在唯一且有限的 $T^* > 0$ ，使每單位時間之期望成本 $B(T)$ 為最小化。

證明：若 $C_f > C_p$ ，且 $f(t)$ 在時間 t 時為嚴格遞增，則第(3.1)式等號左

邊在時間 T 內為連續且嚴格遞增。而且當 T 從 0 遞增到無限大時，其值從 $-C_p$ 到正無限大，改變正負符號恰有一次，故存在唯一且有限解。

肆、總測試時間觀念及 EXCEL 圖解法

本節我們利用總測試時間(Total Time of Test)的觀念及 Excel 圖解法，求解此運動產品之品質管制策略中的預燒檢驗時間。此產品每單位售出之期望成本如第(2.4)式，可由簡單代數運算很容易地求出下列結果：

$$B[T] = \frac{\frac{C_p}{W} + F(T)}{\frac{\mu_r}{W} \left[\frac{1}{\mu_r} \int_0^T \bar{F}(x) dx \right]} \quad (4.1)$$

其中 $W = C_r - C_p > 0$ 及 $\mu_r = \int_0^\infty \bar{F}(y) dy$ 。

為求出最佳置換時間 T^* ，將第(4.1)式成本率最小化，相當於為求出 s^* ，將下式最大化

$$\frac{\phi(s)}{s + C_p / W} \quad (4.2)$$

其中 $s = F(T)$ 及 $\phi(s) = \frac{1}{\mu_r} \int_0^{F^{-1}(s)} \bar{F}(x) dx$

因為 s 為嚴格遞增，故 $\phi(s)$ 為凹函數(Barlow & Campo [14])。我們將利用 Bergman [11]的觀念，以 TTT 轉式最大化即可得到 s^* ，亦即

$$\frac{\phi(s^*)}{s^* + C_p / W} = \max_s \frac{\phi(s)}{s + C_p / W} \quad (4.3)$$

由圖 1 所示可求出 s^* ，則 T^* 由下式求解

$$T^* = F^{-1}(s^*) \quad (4.4)$$

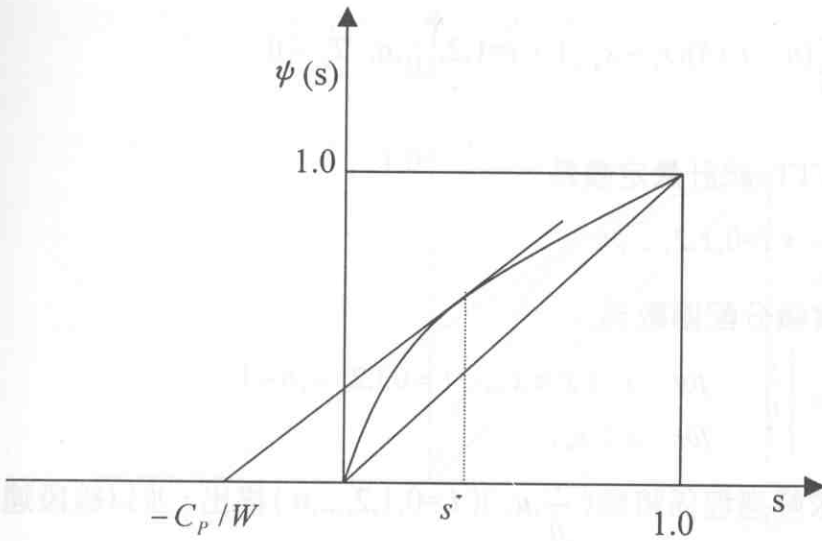


圖 1: 使用比例 TTT 轉式, 以 Excel 繪製最佳預燒時間; 最佳解 $T^* = F_k^{-1}(s^*)$

另外, 若下式條件成立時, 則 T 之最佳解 T^* 存在且唯一。

$$1 - \mu_r l_r < -C_p / W, \quad (4.5)$$

其中 $\mu_r = \int_0^\infty \bar{F}(x) dx$, $l_r = \lim_{t \rightarrow \infty} \lambda(t)$ 及 $\lambda(t)$ 為 $\bar{F}(t)$ 之失效率。

則第(4.5)式亦可寫成

$$1 + C_p / W < \mu_r \lambda \quad (4.6)$$

其中 $\lambda = \lim_{t \rightarrow \infty} \lambda(t)$ 。

伍、統計估計及 EXCEL 圖解法

爲了在有限樣本下探討統計估計法之求算程序, 我們將提出 Excel 圖解法, 此法可以直接從實際的資料中利用 TTT 圖估計出運動產品的最佳預燒時間。

假設樣本試驗資料(預燒時間)排序爲 $0 = x_0 \leq x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n$, 這些資料係從未知的分配函數 F 得到, 由 Barlow & Campo [14]之觀念, TTT 統計量定義爲

$$T_i = \sum_{j=1}^i (n-j+1)(x_i - x_{j-1}), \quad i=1,2,\dots,n. \quad T_0 = 0 \quad (5.1)$$

比例 TTT 統計量定義為

$$u_i = \frac{T_i}{T_n}, \quad i=0,1,2,\dots,n. \quad (5.2)$$

應用實驗分配函數為

$$F_n(x) = \begin{cases} \frac{i}{n} & \text{for } x_i \leq x < x_{i+1} \quad i = 0,1,2,\dots,n-1, \\ 1 & \text{for } x \geq x_n, \end{cases} \quad (5.3)$$

此法求解過程係將點 $(\frac{i}{n}, u_i)$ ($i=0,1,2,\dots,n$) 描出，並以線段連接各點，形成一折線圖稱為比例 TTT 圖，因此我們可以用實驗的嚴重失效分配函數 $F_n(x)$ 表示這些點的位置，就如第(5.3)式所定義，則最佳置換時間的估計值 x_i^* 可由下式之最大化後求出。

$$i^* = \left\{ i \mid \max_{0 \leq i \leq n} \frac{u_i}{i/n + C_p/W} \right\}, \quad (5.4)$$

其中 $W = C_f - C_p > 0$ 。

亦即最佳置換時間之估計值係由求取最大斜率並與圖相切後之橫座標 $\frac{i^*}{n}$ 求得，如圖 2 所示。由如上敘述所推導出來之估計值具有不偏性與一致性 (Dohi、Kaio & Osaki [16])，亦即當資料量增大時，估計值 x_i^* 趨近於真實的最佳解 T^* 。故當所蒐集的實驗資料充分大時，此統計估計法對最佳置換時間之估計是非常的精確。

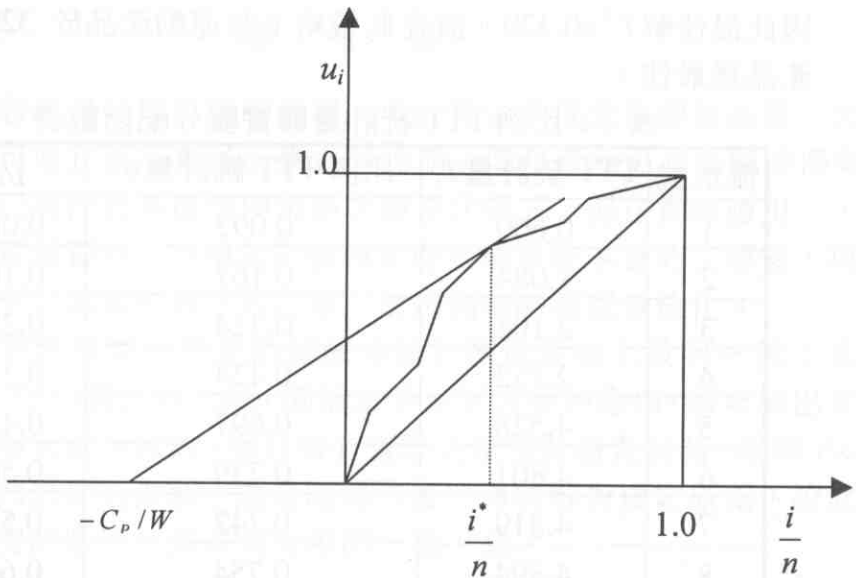


圖 2：使用比例 TTT 圖，以 Excel 繪製最佳預燒時間；估計值 $x_{i^*} \rightarrow T^*$

【案例】有一批新出爐之運動產品，需實施預燒檢驗以篩除不良品，假設本系統每個產品預燒時間為 T 時的預燒成本為 50，而每個產品未通過預燒檢驗的成本為 300（含產品本身成本）。經試驗後之運動產品失效時間依次排序為（單位：1000 小時）0.05, 0.094, 0.196, 0.268, 0.29, 0.329, 0.332, 0.347, 0.544, 0.732, 0.811, 0.899（共 12 個）。

求解過程如下：

(1) $W = C_F - C_p = 250$ ，得 $C_p/W = 0.2$ 。

(2) 求算 TTT 統計量 $T_i = \sum_{j=1}^i (n-j+1)(x_i - x_{j-1})$ ，比例 TTT 統計量 $u_i = \frac{T_i}{T_n}$ 。

如表 1 所示。

(3) 以 Excel 圖解法將點 $(\frac{i}{n}, u_i)$ ($i=0,1,2,\dots,n$) 描出並製作為比例 TTT 圖。

(4) 求解 $\max_s \frac{u_i}{i/n+0.2}$ ，應用 Excel 圖解法從座標 $(-0.2,0)$ 至此圖相交最大切線之切點(如圖 3 所示)，得到 $\frac{i^*}{n}=0.5$ ，故 $i^*=6$ 。得到 $x_6=0.329$ ，

因此最佳解 $T^* = 0.329$ 。故在此策略下該運動產品於 329 小時預燒新產品為最佳。

表 1：比例 TTT 統計量與實驗分配函數表

流水號	TTT 統計量 T_i	比例 TTT 統計量 u_i	i/n
1	0.600	0.092	0.083
2	1.084	0.167	0.166
3	2.104	0.324	0.250
4	2.752	0.424	0.333
5	4.528	0.697	0.417
6	4.801	0.739	0.500
7	4.819	0.742	0.583
8	4.894	0.754	0.667
9	5.682	0.875	0.750
10	6.246	0.962	0.833
11	6.404	0.986	0.917
12	6.492	1.000	1.000

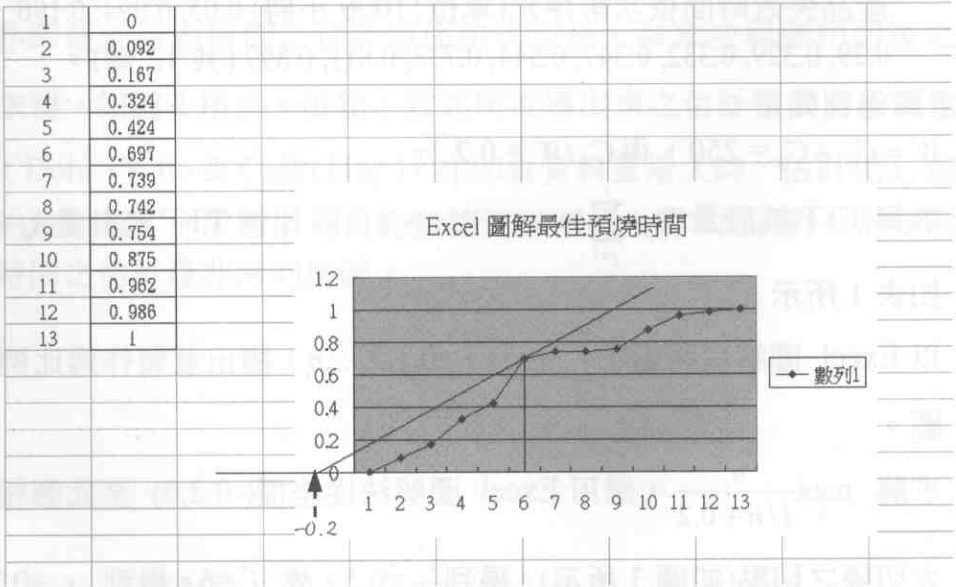


圖 3：使用 Excel 圖解法繪製最佳預燒時間

陸、結 論

運動產品若經過預燒檢驗的篩選，可放寬生產批量和製程品質，另一方面製造商也可增長產品售後服務之保固期，使該產品更具有競爭優勢。雖然很多文獻已經探討多種預燒策略之最佳化模式，但在實際應用上，仍需藉助於一些實驗資料，以增加對該運動產品或系統本身的了解後，再利用方法或工具予以適當的修正或佐證，使預燒策略達到最佳化。

本文應用統計界常用的更新報酬理論於預燒策略上及另一種工具稱為總測試時間(TTT)觀念與 Excel 圖解法予以更方便的應用，所求解出來之最佳預燒時間兩者是一致的，而且若有實際之預燒檢驗資料時，應用 Excel 圖解法可以找到最佳近似解，這是圖解法優於傳統解析法之原因，故此法已証實在可靠度的應用上為非常有用的一種工具。

參考文獻

- 羅惠瓊, 2000, 保固產品之品質管制與售後維護策略分析, 台灣科技大學工業管理系, 博士論文。
- 黃榮杉, 1997, 免費小修保證策略下之產品品質管制, 台灣工業技術學院管理技術研究所, 碩士論文。
- Tapiero, C.S., and H. L. Lee., 1989, Quality Control and Product Servicing: A Decision Framework, *European Journal of Operational Research.*, v.39, pp.261-273.
- Chen, J., D.D., Yao., and S., Zheng., 1998, Quality Control for Product Supplied with warranty, *Operations Research.*, v.46, pp.107-115.
- Kar, T.R., and J.A., Nachlas., 1997, Coordinated Warranty & Burn-in Strategies, *IIE Transactions on Reliability.*, v.46, pp.512-518.
- Nguyen, D.G., and D.N.P., Murthy., 1982, Optimal Burn-in Time to Minimize Cost for Product Sold Under Warranty, *IIE Transactions.*, v.14, pp.167-174.
- Murthy, D.N.P., R.J., Wilson and I., Djamaludin., 1993, Product Warranty and Quality Control, *Quality and Reliability Engineering International.*, v.9,

- pp.431-443.
- Epstein, L., and Sobel, M., 1953, Life Testing, American Statistical Association Journal, Vol.48, pp.486-502.
- Barlow, R.E., Bartholomew, D.J., Bremner, J.M. and Brunk, H.D., 1972, Statistical Inference Under Order Restrictions, John Wiley & Sons, New York.
- Barlow, R.E. and Campo, R., (Philadelphia 1975) Total Time on Test Processes and Applications to Failure Data Analysis, Reliability and Fault Tree Analysis., Vol.SIAM, pp.451-481.
- Bergman, B., 1979, On Age Replacement and the Total Time on Test Concept. Scandinavian Journal of Statistics., v.6, pp.161-168.
- Bergman, B., and Klefsjö, B., 1982, A Graphical Method Applicable to Age Replacement Problems, IEEE Transactions on Reliability, Vo1.31, pp.478-481.
- Ross, S.M., 1970, Applied Probability Models with Optimization Applications, Holden-Day, San Francisco.
- Barlow, R.E., and Campo, R., 1975, Total Time on Test Processes and Applications to Failure Data Analysis, Reliability and Fault Tree Analysis, SIAM Philadelphia., pp.451-481.
- Barlow, R.E., and Hunter, L.C., 1960, Optimum Preventive Maintenance Policies. Operations Research., v.8, pp.90-100.
- Dohi, T., Kaio, N., and Osaki, S., 1995, Solution Procedure for a Repair Limit Problem Using the TTT Concept, IMA Journal of Mathematics Applied in Business and Industry., v.6, pp.101-111.